

# Vektorgeometrie



Nachhilfestunden  
zur  
Vektorgeometrie

Inhalte der Texte

Datei Nr. 63451

Stand: 10. Mai 2026

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK  
UND STUDIUM

<https://mathe-cd.de>

## 63451 Grundlagen zur Vektorrechnung

$$\vec{a}_t = \begin{pmatrix} t^2 \\ -3t^2 \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_t = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ -t \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ -5t+6 \end{pmatrix}, \quad \vec{d}_t = \begin{pmatrix} t-1 \\ 2t^2+3 \\ -10t+9 \end{pmatrix}$$

- 1 Stelle den Vektor  $\vec{d}_t$  als Linearkombination von  $\vec{a}_t$ ,  $\vec{b}_t$  und  $\vec{c}_t$  dar.
- 2 Für welche Werte von  $t$  bilden die Vektoren  $\vec{a}_t$ ,  $\vec{b}_t$  und  $\vec{c}_t$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ ?
- 3 Für welche Werte von  $t$  bilden  $\vec{a}_t$ ,  $\vec{b}_t$ ,  $\vec{c}_t$  und  $\vec{d}_t$  ein Erzeugendensystem des  $\mathbb{R}^3$ ?
- 4 Es sei  $M_t = \{P \mid \vec{x} = \overrightarrow{OP} = \vec{d}_t + r \cdot \vec{a}_t + s \cdot \vec{b}_t, t \in \mathbb{R}\}$   
Für welche Werte von  $t$  stellt  $M_t$  eine Ebene dar und für welche eine Gerade?
- 5 Welche Lage haben die Punktmenge  $M_0$  und  $M_3$  zueinander?
- 6 Für welchen Wert von  $t$  enthält die Schnittmenge von  $M_t$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene genau einen Punkt? Gib dessen Koordinaten an.
- 7  $\vec{d}_t$  sei der Ortsvektor des Punktes  $D_t$ . Gib eine Gleichung der Ebene an, in der alle Punkte  $D_t$  liegen, wenn  $t$  alle zulässigen Werte durchläuft.

## 63452 Das Wichtigste zum Skalarprodukt

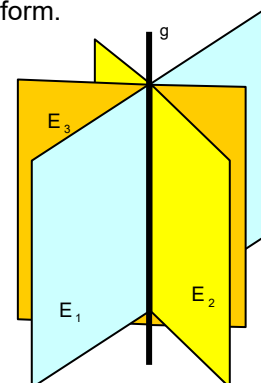
- 1 Warum braucht man das Skalarprodukt in einem Vektorraum?
- 2 Wie ist das Skalarprodukt definiert (wenn die Basisvektoren paarweise orthogonal sind und die Länge (Betrag) 1 haben)? Wie berechnet man den Betrag eines Vektors?
- 3 Wie lautet die Kosinusformel für das Skalarprodukt? (Sie folgt aus dem Kosinussatz).
- 4 Beispiel: Innenwinkel des Dreiecks a)  $A(5|1|0)$ ,  $B(2|0|-7)$ ,  $C(3|2|-1)$ ?  
b)  $A(-2|1|-1)$ ,  $B(0|2|-5)$ ,  $C(3|3|2)$
- 5 Was folgt aus  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ?
- 6 Welche Vektoren sind orthogonal zu  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ?  
Wie bezeichnet man deren Menge?
- 7 Gesucht sind Vektoren, die orthogonal sind zu  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Kurzmethode!
- 8 Geometrische Anwendung: Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$  und ein Punkt  $R(1|3|2)$ . Welche Gleichung hat die Ebene  $E$  durch  $R$ , die orthogonal zu  $g$  ist?  
*Es gibt eine Kurzlösung, die zu einer Parametergleichung von  $E$  führt, und eine Kurzlösung, die zu einer Normalengleichung (= Koordinatengleichung) führt.*
- 9 Wie kann man überprüfen, wie zwei Ebenen zueinander liegen. Verwende diese Ebenen:  
 $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $E_2: 2x - 5z = -8$
- 10 Gegeben sind diese Ebenen:  
 $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$   
Untersuche die gegenseitige Lage. Stelle dazu die Normalengleichung von  $E_1$  auf. Wenn sie sich schneiden, berechne die Gleichung der Schnittgeraden.
- 11 Berechne die Schnittwinkel der Ebenen aus 10.

## Allerlei über Ebenen

$$E_1: \quad \vec{x} = \vec{a}_1 + u \cdot \vec{b}_1 + v \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \quad \vec{x} = \vec{a}_2 + r \cdot \vec{b}_2 + s \cdot \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} t-4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2t \end{pmatrix}$$

- 1 Zeige, dass für  $t = -1$  die Vektoren  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{c}_1$  und  $\vec{b}_2$  linear unabhängig sind.  
*Hinweis: Drei Lösungen werden gezeigt*  
 (1) mit Determinanten, (2) mit dem Gauß-Verfahren, (3) mit Linearkombinationen
- 2 Für welche  $t \in \mathbb{R}$  stellen  $E_1$  und  $E_2$  keine Ebene dar?
- 3 Wie liegen im Fall  $t = -1$  die Ebenen zueinander?
- 4 Für welche  $t$  sind die Ebenen parallel und für welche  $t$  erhält man eine Schnittgerade?  
*Hinweis: Ich zeige 5 Lösungswege*  
 (1) durch eine vektorielle Untersuchung  
 (2) durch Untersuchungen mit Determinanten  
 (3) mit der Gauß-Methode  
 (4) mit den Normalenvektoren  
 (5) mit einem Normalenvektor und zwei Richtungsvektoren
- 5 Bestimme  $t$  so, dass  $E_1$  und  $E_2$  identisch sind.  
*Hinweis: Die Lösung gibt es dreifach:*  
 (1) durch geometrische Überlegungen  
 (2) durch vektorielle Überlegungen  
 (3) mit der Gauß-Methode.
- 6 Stelle für  $E_1$  eine Normalengleichung auf.  
*Hinweis: Es werden drei Methoden gezeigt;*  
 (1) Durch Elimination der Parameter  
 (2) Durch Berechnung eines Normalenvektors mit Skalarprodukt  
 (3) Durch Berechnung eines Normalenvektors mit Kreuzprodukt
- 7 Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden von  $E_1$  und  $E_2$  für  $t = 4$ .  
*Hinweis: Verwende  $E_1$  in Koordinatengleichung und  $E_2$  in Parameterform.*
- 8 Die Gleichung  $E_1$  stellt für jedes  $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  eine Ebene dar. Zeige, dass diese Ebenen ein Ebenenbündel bilden, d.h. alle Ebenen  $E_1$  gehen durch dieselbe Gerade  $g$ .
- 9 Die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  sind für  $t = 3$  parallel. Berechne ihren Abstand.  
*Hinweis: Die Lösung gibt es doppelt*  
 (1) mit einer Lotgeraden  
 (2) mit der Hesseschen Normalform



### 63454 Komplizierte Ebenenschar *mit viel Rechenübung!*

Gegeben ist für  $t \in \mathbb{R}$  die Punktmenge  $E_t: \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4t + 4 \\ 4t + 8 \\ t^2 - 4t - 4 \end{pmatrix}$

- 1 Für welche Werte von  $t$  ist  $E_t$  eine Ebene?
- 2 Bestimme die Schnittmenge von  $E_{-2}$  und  $E_1$ .
- 3 Überprüfe, ob die Ebenenschar  $E_t$  ein Ebenenbündel ist.
- 4 Die Punkte  $A(4 | 1 | -1)$ ,  $B(5 | 3 | -2)$  und  $C(6 | 5 | 2)$  legen eine weitere Ebene  $E$  fest.  
Gib eine Gleichung von  $E$  an.
- 5 Bestimme die Schnittmenge  $M_t$  von  $E_t$  mit der Ebene  $E$  in Abhängigkeit von  $t$ .  
Für welchen Wert von  $t$  ist  $M_t$  keine Gerade?
- 6 Für welchen Wert von  $t$  liegt  $P(-13 | -49 | 32)$  in der Ebene  $E_t$ ?

### 63455 Flugbahnen zweier Modellflugzeuge

Auf einem ebenen Flugplatz starten gleichzeitig zwei Modellflugzeuge  $F_1$  und  $F_2$ .

Die Startbahn liegt in der  $x_1x_2$ -Ebene.

$F_1$  hebt in  $P_0(300 | 700 | 0)$  ab und bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

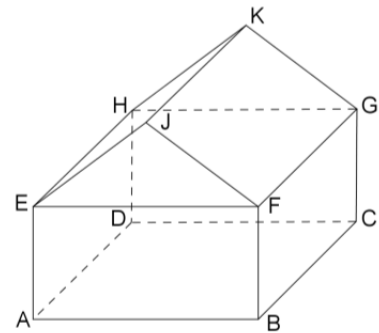
$F_2$  hebt in  $Q_0(200 | 0 | 0)$  ab und bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ .

Beide Flugbahnen sind gradlinig. Alle Ortskoordinaten sind in Meter, alle Zeiten in Sekunden, alle Geschwindigkeiten in Meter pro Sekunde angegeben.

- 1 Gib für die Flugbahnen jeweils eine Gleichung an.
- 2 Zeige, dass sich die beiden Bahnen kreuzen. Stoßen die Flugzeuge zusammen?
- 3 Berechne den Abstand der beiden Flugzeuge 10 Sekunden nach dem Start.
- 4 Aus Sicherheitsgründen müssen  $F_1$  und  $F_2$  während ihres Fluges immer einen Mindestabstand von 50 Meter einhalten. Untersuche, ob diese Vorschrift erfüllt ist.
- 5 Der Flugplatz grenzt an eine senkrechte, ebene Felswand, die wir idealisiert als Rechteck ansehen können. Die Grundlinie geht von  $A(870 | 706 | 0)$  bis  $B(910 | 698 | 0)$  und die Höhe beträgt 40 Meter.  
Berechne den Punkt  $Q$ , in dem möglicherweise das Flugzeug  $F_2$  auf der Felswandebene auftreffen könnte. Untersuche, ob  $Q$  im Innern des Rechtecks liegt.
- 6 Um eine Kollision mit der Wand zu vermeiden wird durch die Betätigung des Höhenruders 50 Sekunden nach dem Start die Geschwindigkeit von  $F_2$  geändert in  $\vec{v}_{\text{Neu}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ a \end{pmatrix}$ .  
Bestimme  $a$  so, dass  $F_2$  die Felswand mit 1 Meter Höhenunterschied überfliegt.

## 63456 Modell eines Hauses

Nebenstehend ein Modell eines Hauses. Die Grundfläche ist ein achsenparalleles Rechteck in der  $xy$ -Ebene. Die Eckpunkte haben diese Koordinaten:  $D(0|0|0)$ ,  $F(10|8|4)$ ,  $G(0|8|4)$ ,  $J(10|4|7)$ , wobei  $1 \text{ LE} = 1 \text{ m}$  entspricht.



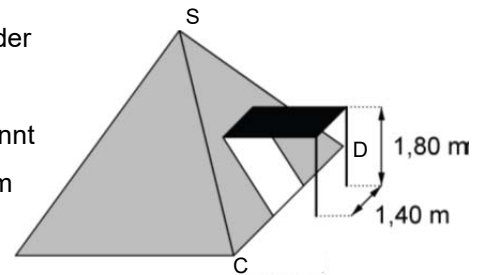
- 1 Welche Koordinaten haben die restlichen sechs Punkte?
- 2 Welche Koordinatengleichung hat die Ebene  $E^*$ , in der die Dachfläche  $FGKJ$  liegt?    Kontrollergebnis:  $E^* : 3y + 4z = 40$  ]
- 3 Berechne den Neigungswinkel der Dachfläche  $FGKJ$  gegenüber der Ebene  $xy$ -Ebene?
- 4 Paralleles Licht fällt in Richtung  $\vec{w} = \begin{pmatrix} -\sqrt{39} \\ y \\ -5 \end{pmatrix}$  auf das Hausdach, so dass der Winkel zwischen der Richtung der Lichtstrahlen und der Dachfläche  $E^*$   $30^\circ$  beträgt. Berechne die Koordinate  $y$ .
- 5 Ein Drittel der Dachfläche  $FGKJ$  ist mit Solarzellen bedeckt. Wie viele  $\text{m}^2$  sind das?
- 6 Die Solarzellen können sowohl in der Dachfläche montiert werden als auch in Ebenen  $F_a$ , die parallel zur Dachfläche liegen. Dabei darf der Abstand der Ebenen  $F_a$  zur Dachfläche maximal  $20 \text{ cm}$  betragen. Stelle in Abhängigkeit des Parameters  $a$  eine Gleichung für die Ebenen  $F_a$ . Welches Parameterintervall gehört dazu?
- 7 Im Innern des Hauses ist auf dem Fußboden  $EFGH$  des Dachraumes im Punkt  $P(1|5|4)$  ein  $4 \text{ m}$  langer, senkrecht stehender Mast für eine Satellitenantenne montiert. Dieser Mast ragt durch das Dach ins Freie. Ermittle die Länge des Teiles dieses Mastes, der sich außerhalb des Hauses befindet.
- 8 Berechne den Abstand der Mastspitze  $S$  zur Ebene  $E^*$ .
- 9 Gegeben sind die Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 6,25 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .  
Entlang dieser Geraden wurden zwei Dachbalken befestigt, die in  $E^*$  liegen.  
Zeige, dass  $g$  und  $h$  parallel verlaufen und berechne ihren Abstand.

## 63457 Ein großes Pyramidenzelt ...

Ein geschlossenes Zelt, das auf horizontalem Untergrund steht, hat die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die seitlichen Kanten der Zeltwände bilden vier gleich lange Stangen. Das Zelt ist 3,90m hoch, die Seitenlänge des Zeltbodens beträgt 5,00 m. Es kann in einem kartesischen Koordinatensystem durch eine Pyramide ABCDS mit der Spitze S dargestellt werden. Der Punkt A liegt im Koordinatenursprung, B auf dem positiven Teil der x-Achse und D auf dem positiven Teil der y-Achse. C hat die Koordinaten  $(5 | 5 | 0)$ , der Mittelpunkt der Grundfläche sei M. Das Dreieck ABS liegt in der Ebene E:  $-39y + 25z = 0$ . (1 Längeneinheit  $\hat{=} 1$  m.)

- 1) Gib die Koordinaten der Punkte B, D, M und S an und zeichne die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.
- 2) Jeweils zwei benachbarte Zeltwände schließen im Inneren des Zeltes einen stumpfen Winkel ein. Ermittle dessen Größe. (Ich zeige drei verschiedene Methoden!)
- 3) Im Zelt ist eine Lichtquelle so aufgehängt, dass sie von jeder der vier Wände einen Abstand von 80 cm hat. Ermittle die Koordinaten des Punktes, der die Lichtquelle im Modell darstellt.

Eine Zeltwand wird durch das Dreieck CDS dargestellt. Es liegt in der Ebene F:  $39y + 25z = 195$ . Ein Teil dieser Zeltwand kann mithilfe zweier weiterer Stangen zu einem horizontalen Vordach aufgespannt werden. Die dadurch entstehende Öffnung in der Zeltwand kann im Modell durch ein Rechteck dargestellt werden. Eine Seite dieses Rechtecks liegt so auf der Strecke CD, dass der eine Endpunkt dieser Seite von C ebenso weit entfernt ist wie der andere Endpunkt von D.



- 4) Weise nach, dass die Länge des Vordachs etwa 2,14 m beträgt.
- 5) Schräg vor das Zelt wird eine elektrische Leitung gespannt um außen eine Abendbeleuchtung zu haben. Sie wird an senkrechte Stangen montiert, und zwar in den Punkten  $N_1(7 | 2,5 | 2,5)$  und  $N_2(2,5 | 7 | 2,5)$ . Welches ist der kleinste Abstand zwischen der gespannten Leitung und der Eckkante CS des Zeltes?

Vorarbeit: Man muss erkennen, dass diese Geraden windschief sind, d.h. nicht in einer Ebene liegen. Das kann man auch vektoriell nachweisen, was hier nicht geschehen soll. Es gibt verschiedene Methoden für die Aufgabe, den kürzesten Abstand windschiefer Geraden zu berechnen. Ich zeige zwei Methoden:

## Neue Nachhilfe-Texte:

|       |  |
|-------|--|
| 65512 | Geraden, Ebenen, Kugel                                   |
| 65514 | Kugel, Ebene, Tangentialebene, Ebenenschar, Schnittkreis |
| 65515 | Kugel, Ebene, Tangentialebene, Kugelschar, Schnittkreis  |
| 67121 | Geradenschar   |
| 67131 | Ebenenschar  |
| 67311 | Pyramide   |
| 67512 | Kugel u. a.  |
| 67513 | Kugelschar   |

## Matrizenrechnung und lineare Algebra

**62451** Gegeben sind für  $t \in \mathbb{R}$  die Vektoren  $\vec{a}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c}_t = \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 2t - 1 \\ 2-t \end{pmatrix}$ ,  $\vec{d}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{a}_t$ ,  $\vec{b}_t$  und  $\vec{c}_t$  sind die Spaltenvektoren einer Matrix  $\mathbf{A}_t$ .

1 Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems  $\mathbf{A}_{-2} \cdot \vec{x} = \vec{0}$

1. Lösung durch Elimination, 2. Lösung mit dem Gauß-Verfahren.

2 Für welche Werte von  $t$  besitzt das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{A}_t \cdot \vec{x} = \vec{d}_t$

unendlich viele Lösungen bzw. genau eine Lösung.

Bestimme für diese beiden Fälle je einen Lösungsvektor.

1. Lösung mit Determinanten (Seite 4 bis 6), 2. Lösung mit Gauß (Seite 7)

3 Ein Vektor  $\vec{y}_t$  ist für  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  gegeben durch 
$$\vec{y}_t = \frac{1}{t+2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass die Menge dieser Vektoren kein Untervektorraum des  $\mathbb{R}^3$  ist.

Lösung Seite 8.

4  $\vec{a}_t$ ,  $\vec{b}_t$  und  $\vec{d}_t$  sind die Spaltenvektoren der Matrix  $\mathbf{B}_t$ .

Bestimme in Abhängigkeit von  $t$  die Lösung der Matrixgleichung

$$\mathbf{B}_t \cdot \mathbf{X} + \mathbf{E} = \mathbf{B}_t$$

Lösung Seite 8 und 9. Berechnung der inversen Matrix von  $B_t$  Seite 9.